Théorème de Thalès et sa réciproque

Le théorème de Thalès relie les longueurs de deux triangles quand deux droites sont parallèles. Tu sauras calculer une longueur et prouver que deux droites sont parallèles, ou ne le sont pas.

L'ESSENTIEL

Deux triangles emboîtés ou en papillon, avec des côtés parallèles, ont les mêmes proportions : leurs côtés sont proportionnels.

AM/AB = AN/AC = MN/BC

Astuce : Petit triangle en haut, grand en bas, toujours dans le même ordre pour les trois rapports.

- Hypothèses : M sur la droite (AB), N sur la droite (AC), et (MN) parallèle à (BC).
- Alors AM/AB = AN/AC = MN/BC : les côtés des deux triangles sont proportionnels.
- L'égalité s'écrit de la même façon en configuration emboîtée ou papillon.
- Pour calculer une longueur, on garde deux rapports et on fait un produit en croix.
- Réciproque : si les points sont alignés dans le même ordre et si AM/AB = AN/AC, alors (MN) et (BC) sont parallèles.
- Contraposée : si AM/AB est différent de AN/AC, les droites ne sont pas parallèles.

EXEMPLE GUIDÉ

M est sur [AB], N sur [AC] et (MN) // (BC), avec AM = 4 cm, AB = 10 cm et AC = 15 cm. On cherche AN.

1. Je vérifie les hypothèses : M est sur (AB), N sur (AC) et (MN) // (BC).
2. J'écris l'égalité de Thalès et je garde le rapport utile : AM/AB = AN/AC.
3. Je remplace : 4/10 = AN/15.
4. Produit en croix : AN = 4 × 15 ÷ 10 = 6 cm.

PIÈGE DU BREVET

Thalès ou sa réciproque ?

PIÈGE DU BREVET (SUITE)

Pour calculer une longueur, tu as besoin des parallèles : c'est le théorème. Pour prouver que deux droites sont parallèles, c'est la réciproque : compare les rapports, vérifie que les points sont alignés dans le même ordre, puis conclus.

EXERCICE TYPE BREVET

La hauteur du lampadaire

Le soir, Inès, qui mesure 1,6 m, se tient debout à 6 m du pied d'un lampadaire. Son ombre, projetée par la lampe, mesure 2 m.

On note O le bout de l'ombre, P les pieds d'Inès, H le haut de sa tête, L le pied du lampadaire et T la lampe. Les points O, P, L sont alignés, ainsi que les points O, H, T.

1. Justifie que les droites (PH) et (LT) sont parallèles.

2. Calcule la hauteur LT du lampadaire.

Indice : Inès et le lampadaire sont tous deux perpendiculaires au sol.

CORRIGÉ

1. Les droites (PH) et (LT) sont toutes deux perpendiculaires au sol, c'est-à-dire à la droite (OL). Deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles.

2. OL = OP + PL = 2 + 6 = 8 m. Les points O, P, L et O, H, T sont alignés et (PH) est parallèle à (LT) : d'après le théorème de Thalès, OP/OL = PH/LT.

Donc 2/8 = 1,6/LT, d'où LT = 1,6 × 8 ÷ 2 = 6,4.

Le lampadaire mesure 6,4 m de haut.