# Homothéties et transformations

Une homothétie agrandit ou réduit une figure à partir d'un point, son centre. Tu sauras construire l'image d'un point, prévoir l'effet sur les longueurs et les aires, et la comparer aux symétries, translations et rotations.

L'ESSENTIEL

**Une homothétie de centre O et de rapport k agrandit ou réduit une figure en multipliant ses longueurs par k, ou par −k si k est négatif.**

## Longueurs × k, aires × $k^2$, volumes × $k^3$ (k positif)

Astuce : Longueur, aire, volume : 1, 2 et 3 dimensions, donc k, $k^2$ et $k^3$. L'exposant suit le nombre de dimensions.

- L'homothétie de centre O et de rapport k envoie A sur A', avec O, A et A' alignés.
- Si k est positif, A' est sur [OA) et OA' = k × OA ; si k est négatif, A' est de l'autre côté de O et OA' = (−k) × OA.
- Rapport supérieur à 1 ou inférieur à −1 : agrandissement ; rapport non nul strictement compris entre −1 et 1 : réduction.
- L'homothétie de rapport −1 est la symétrie de centre O.
- Si k est positif, les longueurs sont multipliées par k, les aires par $k^2$ et les volumes par $k^3$ ; si k est négatif, on remplace k par −k.
- Symétries, translations et rotations conservent les longueurs, les angles et les aires.

EXEMPLE GUIDÉ

**Un carré de 3 cm de côté est transformé par une homothétie de centre O et de rapport −4. Calcule le côté et l'aire de son image.**

1. Le rapport vaut −4 : je multiplie donc les longueurs par 4.
2. Je calcule le côté de l'image : 3 × 4 = 12 cm.
3. Les aires sont multipliées par $4^2 = 16$ : l'aire passe de $3^2 = 9$ cm² à 9 × 16 = 144 cm².
4. Je vérifie : 12 × 12 = 144 cm². L'image est un carré de 12 cm de côté, de l'autre côté de O.

PIÈGE DU BREVET

### Les aires ne sont pas multipliées par k

Avec un rapport 3, une aire est multipliée par $3^2 = 9$, pas par 3, et un volume par $3^3 = 27$. Et si le rapport est négatif, une longueur ne devient jamais négative : calcule avec $-k$.

EXERCICE TYPE BREVET

### L'image du projecteur

Un projecteur de diapositives forme une image sur un écran. On modélise la situation par une homothétie de centre O, la lentille, et de rapport $-50$.

La diapositive est un rectangle de 3,6 cm sur 2,4 cm.

1. Pourquoi l'image apparaît-elle renversée sur l'écran ?

2. Calcule les dimensions de l'image, en mètres.

3. Par quel nombre l'aire de la diapositive est-elle multipliée ? Calcule l'aire de l'image en $m^2$.

Indice : Le signe du rapport indique de quel côté du centre se trouve l'image ; les aires sont multipliées par le carré du rapport.

CORRIGÉ

1. Le rapport est négatif : chaque point et son image sont de part et d'autre du centre O, donc la figure est retournée, comme par une symétrie de centre O.

2. Les longueurs sont multipliées par 50 : $3{,}6 \times 50 = 180$ cm et $2{,}4 \times 50 = 120$ cm. L'image mesure 1,8 m sur 1,2 m.

3. Les aires sont multipliées par $50^2 = 2\,500$. L'aire de la diapositive vaut $3{,}6 \times 2{,}4 = 8{,}64$ $cm^2$.

Aire de l'image : $8{,}64 \times 2\,500 = 21\,600$ $cm^2$, soit 2,16 $m^2$. Vérification : $1{,}8 \times 1{,}2 = 2{,}16$ $m^2$.