Équations produit nul et équations $x^2 = a$

Certaines équations ne se résolvent pas en isolant x, mais en écrivant un produit égal à zéro. Tu sauras résoudre une équation produit nul, factoriser pour t'y ramener et résoudre $x^2 = a$.

L'ESSENTIEL

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul : une équation produit se découpe en petites équations simples.

$A \times B = 0$ équivaut à $A = 0$ ou $B = 0$

Astuce : Autant de facteurs, autant de petites équations : avec deux parenthèses, attends-toi le plus souvent à deux solutions.

- Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.
- $(x - 4)(x + 1) = 0$ équivaut à $x - 4 = 0$ ou $x + 1 = 0$: $x = 4$ ou $x = -1$.
- Si l'équation n'est pas un produit, on ramène tout d'un côté puis on factorise.
- Facteur commun : $x^2 - 3x = x(x - 3)$. Identité : $x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$.
- $x^2 = a$: deux solutions si a est positif (la racine carrée de a et son opposé), une seule si $a = 0$ ($x = 0$), aucune si a est négatif.
- Dans un problème, on vérifie que chaque solution a du sens dans le contexte.

EXEMPLE GUIDÉ

Résous l'équation $(5x - 10)(x + 7) = 0$.

1. Je repère un produit égal à 0 : l'un des facteurs au moins est nul.
2. J'écris $5x - 10 = 0$ ou $x + 7 = 0$.
3. Je résous chaque petite équation : $5x = 10$ donne $x = 2$, et $x + 7 = 0$ donne $x = -7$.
4. L'équation a deux solutions : 2 et -7.

PIÈGE DU BREVET

Ne jamais diviser par x

PIÈGE DU BREVET (SUITE)

Face à $x^2 = 5x$, tu as envie de diviser par x : tu perdrais la solution 0. Passe tout du même côté, $x^2 - 5x = 0$, factorise en $x(x - 5) = 0$, et tu trouves bien $x = 0$ ou $x = 5$.

EXERCICE TYPE BREVET

Le carré découpé

x désigne un nombre supérieur ou égal à 7. Un grand carré a pour côté $x - 3$ cm. On y découpe un petit carré de 4 cm de côté. L'aire restante, en cm², est $A = (x - 3)^2 - 16$.

1. Montre que $A = (x - 7)(x + 1)$.

2. Pour quelle valeur de x l'aire restante est-elle nulle ?

3. Pour quelle valeur de x l'aire du grand carré vaut-elle 81 cm² ?

Indice : Reconnais la forme $a^2 - b^2$ avec $a = x - 3$ et $b = 4$.

CORRIGÉ

1. $A = (x - 3)^2 - 4^2 = (x - 3 - 4)(x - 3 + 4) = (x - 7)(x + 1)$.

2. $A = 0$ si $x - 7 = 0$ ou $x + 1 = 0$, soit $x = 7$ ou $x = -1$. Comme x est supérieur ou égal à 7, on garde $x = 7$: le grand carré mesure alors 4 cm de côté, comme le petit.

3. $(x - 3)^2 = 81$ donne $x - 3 = 9$ ou $x - 3 = -9$, soit $x = 12$ ou $x = -6$. Comme x est supérieur ou égal à 7, $x = 12$.

Pour $x = 12$, le grand carré a un côté de 9 cm et une aire de 81 cm².