Nombres premiers et arithmétique

L'arithmétique étudie les nombres entiers et leurs diviseurs. Tu sauras reconnaître un nombre premier, décomposer un nombre, simplifier une fraction et résoudre un problème de partage.

L'ESSENTIEL

Tout entier supérieur ou égal à 2 se décompose en produit de nombres premiers, ce qui aide à simplifier des fractions et à résoudre des partages.

b divise a si a = b × k, avec k entier

Astuce : Pour décomposer, divise par 2 tant que tu peux, puis par 3, par 5, par 7… : les nombres premiers dans l'ordre, du plus petit au plus grand.

- b est un diviseur de a si a = b × k avec k entier ; a est alors un multiple de b.
- Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- Un nombre premier a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même. 1 n'est pas premier.
- Tout entier supérieur ou égal à 2 se décompose de façon unique en produit de facteurs premiers : $60 = 2^2 \times 3 \times 5$.
- Fraction irréductible : on simplifie par tous les facteurs communs au numérateur et au dénominateur.
- Problème de partage en lots identiques : on cherche le plus grand diviseur commun.

EXEMPLE GUIDÉ

Rends la fraction 90/150 irréductible en décomposant 90 et 150 en produits de facteurs premiers.

1. Je décompose 90 : 90 = 2 × 45 = 2 × 3 × 15 = 2 × 3 × 3 × 5.
2. Je décompose 150 : 150 = 2 × 75 = 2 × 3 × 25 = 2 × 3 × 5 × 5.
3. Je barre les facteurs communs 2, 3 et 5 : il reste 3 au numérateur et 5 au dénominateur.
4. J'obtiens 90/150 = 3/5, irréductible car 3 et 5 n'ont aucun diviseur commun autre que 1.

PIÈGE DU BREVET

1 n’est pas premier, et impair ne veut pas dire premier

Un nombre premier a exactement deux diviseurs, 1 et lui-même : 1 n’en a qu’un, il n’est donc pas premier. Un nombre impair n’est pas forcément premier non plus : cherche un diviseur, comme $91 = 7 \times 13$.

EXERCICE TYPE BREVET

Les kits de course

Un club prépare des kits pour une course. Il dispose de 120 bouteilles d’eau et de 84 barres de céréales. Tous les kits doivent être identiques et tout doit être utilisé.

1. Décompose 120 et 84 en produits de facteurs premiers.
2. Quel est le plus grand nombre de kits possible ?
3. Que contient alors chaque kit ?
4. Écris la fraction $84/120$ sous forme irréductible.

Indice : Le nombre de kits doit diviser à la fois 120 et 84 : cherche le plus grand diviseur commun.

CORRIGÉ

1. $120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3 \times 5$ et $84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 2^2 \times 3 \times 7$.
2. Les facteurs communs sont 2^2 et 3 : le plus grand diviseur commun est $2^2 \times 3 = 12$. Le club peut faire au maximum 12 kits.
3. Chaque kit contient $120 \div 12 = 10$ bouteilles d’eau et $84 \div 12 = 7$ barres de céréales.
4. On simplifie par 12 : $84/120 = 7/10$, irréductible car 7 et 10 n’ont aucun diviseur commun autre que 1.